ミッタク・レフラーのコホモロジー消滅定理

令和 4 年 12 月改訂
平成 30 年 11 月
小澤　徹
http://www.ozawa.phys.waseda.ac.jp/index2.html

クザンの加法的問題の解法の代数学的定式化としてのミッタク・レフラーの第 1 コホモロジー群消滅定理を、ルンゲの近似定理の構成的特徴付けを基礎として論じる。

１．ルンゲの近似定理

開集合 $\Omega \subset \mathbb{C}$ 上の正則函数の成す環及び有理型函数の成す体を夫々 $\mathscr{O}(\Omega)$ 及び $\mathscr{M}(\Omega)$ と表す。$f \in \mathscr{M}(\Omega)$ の極の成す集合を $\mathrm{Pol}(f)$ と表す。$\mathbb{C}$ 上の多項式の成す環及び有理函数の成す体を夫々 $\mathscr{P}(\mathbb{C})$ 及び $\mathscr{R}(\mathbb{C})$ と表す。この節ではルンゲの近似定理を同値な形で定式化し構成的な証明を与えよう。

定理 1（ルンゲの近似定理）　開集合 $\Omega \subset \mathbb{C}$ 及びコンパクト集合 $K \subset \mathbb{C}$ は包含関係 $K \subset \Omega$ を満たしているとする。この時、次は同値である。

(1) $K \subset U \subset \bar{U} \subset \Omega$ 且つ $\bar{U}$ はコンパクトなる任意の開集合 U 及び任意の $f \in \mathscr{O}(U)$ に対し、列 $(f_n) \subset \mathscr{O}(\Omega)$ が存在し $\|f - f_n;\ L^\infty(K)\| \to 0\ (n \to \infty)$ を満たす。

(2) 任意の $z \in \Omega \setminus K$ に対し $f \in \mathscr{O}(\Omega)$ が存在し、不等式

$$\|f;\ L^\infty(K)\| < |f(z)|$$

を満たす。

(3) K は Ω に対する正則凸包 $\widehat{K}_\Omega := \{z \in \Omega;\ |f(z)| \le \|f;\ L^\infty(K)\|\ \forall f \in \mathscr{O}(\Omega)\}$ に一致する: $K = \widehat{K}_\Omega$

(4) $\Omega \setminus K$ の有界な連結成分 V であって $\bar{V} \subset \Omega$ なるものは存在しない。

(5) $\Omega \setminus K$ の任意の有界連結成分 V は $\bar{V} \not\subset \Omega$ を満たす。

(6) $\Omega \setminus K$ の任意の有界連結成分 V は $\bar{V} \cap \partial\Omega \neq \emptyset$ を満たす。

(7) $\Omega \setminus K$ の任意の有界連結成分 V は $\partial V \cap \partial\Omega \neq \emptyset$ を満たす。

註1　Ω と K の関係に就いて、(1) は正則函数に関する近似、(2)-(3) は正則函数に関する評価を用いて解析学的に記述したものである。一方 (4)-(7) は Ω と K の関係を位相の概念を用いて幾何学的に記述したものである。それらが同値であると主張するのがルンゲの近似定理の意義深い所である。

註2　$0 \le r < 1/4$ なる r に対し $\Omega = \{z \in \mathbb{C};\ r < |z| < 1\},\ K = \{z \in \mathbb{C};\ 2r \le |z| \le 1/2\}$ と置く。$\Omega \setminus K$ は互いに素な二つの空でない $(\Omega \setminus K)$ の開かつ閉集合 $V_1 = \{z \in \mathbb{C};\ 1/2 < |z| < 1\}$ と $V_2 = \{z \in \mathbb{C};\ r < |z| < 2r\}$ に依って $\Omega \setminus K = V_1 \sqcup V_2$ と表される。V_1 と V_2 は $\Omega \setminus K$ の有界な連結成分である。さて $\overline{V_1} = \{z \in \mathbb{C};\ 1/2 \le |z| \le 1\}$ 及び $\overline{V_2} = \{z \in \mathbb{C};\ r \le |z| \le 2r\}$ となるので $\{z \in \mathbb{C};\ |z| = 1\} \subset \overline{V_1} \setminus \Omega$ 及び $\{z \in \mathbb{C};\ |z| = r\} \subset \overline{V_2} \setminus \Omega$ が従い、特に $\overline{V_1} \not\subset \Omega$ 及び $\overline{V_2} \not\subset \Omega$ また $\overline{V_1} \cap \partial\Omega = \{z \in \mathbb{C};\ |z| = 1\}$ 及び $\overline{V_2} \cap \partial\Omega = \{z \in \mathbb{C};\ |z| = r\}$ が従う。即ち (4)-(7) が成立する。

註3　$\Omega = \{z \in \mathbb{C};\ |z| < 1\}$ とし $0 < r < 1$ なる r に対し $K = \{z \in \mathbb{C};\ r/2 \le |z| < r\}$ と置く。$\Omega \setminus K$ は互いに素な二つの空でない $(\Omega \setminus K$ の$)$ 開かつ閉集合 $V_1 = \{z \in \mathbb{C};\ r < |z| < 1\}$ と $V_2 = \{z \in \mathbb{C};\ |z| < r/2\}$ に依って $\Omega \setminus K = V_1 \sqcup V_2$ と表される。V_1 と V_2 は $\Omega \setminus K$ の有界の連結成分である。さて $\overline{V_1} = \{z \in \mathbb{C};\ r \le |z| \le 1\}$ 及び $\overline{V_2} = \{z \in \mathbb{C};\ |z| \le r/2\}$ となるので $\overline{V_1} \not\subset \Omega$ であるが $\overline{V_2} \subset \Omega$ 及び $\overline{V_2} \cap \partial\Omega = \emptyset$ となり、(4)-(7) は成立しない。

ルンゲの近似定理の証明の為に、先ず補題を二つ準備しよう。

補題1　$\Omega \subset \mathbb{C}$ を有界開集合とし $K \subset \mathbb{C}$ を $K \subset \Omega$ なるコンパクト集合とする。この時、任意の $f \in \mathscr{O}(\Omega)$ に対し $(f_n;\ n \in \mathbb{Z}_{\ge 1}) \subset \mathscr{R}(\mathbb{C})$ 及び $(\xi_j;\ 1 \le j \le N) \subset \partial\Omega$ が存在し任意の $n \in \mathbb{Z}_{\ge 1}$ に対し $\mathrm{Pol}(f_n) = \{\xi_j;\ 1 \le j \le n\} \subset \partial\Omega$ 且つ $\|f_n - f;\ L^\infty(K)\| \to 0\ (n \to \infty)$ を満たす。

(証明)　一辺の長さを $1/2^n$ とする正方形の列 $(Q_n(j,k);\ j,k \in \mathbb{Z})$ を考え Ω に含まれる全ての合併を Ω_n とする。即ち $n \in \mathbb{Z}_{\ge 1}$ に対し

$$Q_n(j,k) := \left\{ z \in \mathbb{C};\ \frac{j}{2^n} \le \mathrm{Re}\ z \le \frac{j+1}{2^n},\ \frac{k}{2^n} \le \mathrm{Im}\ z \le \frac{k+1}{2^n} \right\},$$
$$\Omega_n := \bigcup_{(j,k) \in I_n} Q_n(j,k),\ I_n := \{(j,k) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z};\ Q_n(j,k) \subset \Omega\}$$

と置く。この時 $(\mathrm{Int}\ \Omega_n;\ n \in \mathbb{Z}_{\ge 1})$ は

$$\Omega = \bigcup_{n \ge 1} \mathrm{Int}\ \Omega_n$$

なる Ω の開部分集合の増大列を成す。$N_0 \in \mathbb{Z}_{\ge 1}$ が存在し $n \ge N_0$ なる任意の $n \in \mathbb{Z}_{\ge 1}$ に対し

$$K \subsetneqq \mathrm{Int}\ \Omega_n$$

が従う。そこで

$$\delta_0 := d(K,\ \partial\Omega_{N_0})$$

と置くと $\delta_0 > 0$ であり任意の $n \ge N_0$ に対し不等式

$$\delta_0 \le d(K,\ \partial\Omega_n) \le d(K,\ \partial\Omega_{n+1}) \le \cdots \le d(K,\ \mathbb{C} \setminus \Omega)$$

が成立つ。$N \geq N_0$ が存在し任意の $n \geq N$ に対し

$$\frac{\sqrt{2}}{2^{n-1}} \leq \delta_0$$

を満たす。以上より、任意の $n \geq N$ に対し

$$\begin{aligned}
&K \subset \mathrm{Int}\ \Omega_n, \\
&\frac{\sqrt{2}}{2^{n-1}} \leq \delta_0 \leq d(K,\ \partial\Omega_n) \leq d(K,\ \partial\Omega_{n+1}) \leq \cdots \leq d(K,\ \mathbb{C} \setminus \Omega), \\
&d(\partial\Omega_n,\ \mathbb{C} \setminus \Omega) \leq \frac{\sqrt{2}}{2^n}
\end{aligned}$$

が成立つ。$\partial\Omega_N$ を向き付けた区分的 C^1 曲線を γ とし、その部分を成す長さ $1/2^N$ の線分を向き付けて $\gamma_1, \cdots, \gamma_N$ とすると各 $j \in \{1, \cdots, N\}$ に対し γ_j を一辺に持つ $Q_N(k,l) \subset \Omega$ と γ_j を共有する $Q_N(k',l')$ は $\partial\Omega$ と交わる。即ち $Q_N(k',l') \cap Q_N(k,l) = \gamma_j$ 且つ $Q_N(k',l') \cap \partial\Omega \neq \emptyset$ なる正方形 $Q_N(k',l')$ が存在する。そこで一点 $\xi_j \in Q_N(k',l') \cap \partial\Omega$ を取る。この時、任意の $z \in K$ 及び $\zeta \in \gamma_j$ に対し

$$\begin{aligned}
|\zeta - \xi_j| &\leq \frac{\sqrt{2}}{2^N} \leq \frac{\delta_0}{2} \leq \frac{1}{2} d(K,\ \partial\Omega_N) \leq \frac{1}{2} d(K,\ \partial\Omega) \\
&\leq \frac{1}{2}|z - \xi_j|
\end{aligned}$$

が成立つ。従って任意の $z \in K$ と $\zeta \in \gamma_j$ に対し $1/(z-\zeta)$ は $K \times \gamma_j$ 上一様且つ絶対収束する冪級数展開

$$\frac{1}{z-\zeta} = \frac{1}{z-\xi_j}\ \frac{1}{1 - \frac{\zeta - \xi_j}{z - \xi_j}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\zeta - \xi_j)^k}{(z - \xi_j)^{k+1}}$$

を持つ。そこで $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ に対し

$$\begin{aligned}
f_n &:= \sum_{j=1}^{N}\ R_{jn}, \\
R_{jn}(z) &:= -\frac{1}{2\pi i} \sum_{k=0}^{n} \int_{\gamma_j} (\zeta - \xi_j)^k f(\zeta) d\zeta (z - \xi_j)^{-k-1}
\end{aligned}$$

と置くと $f_n \in \mathscr{R}(\mathbb{C})$ が定まり

$$\mathrm{Pol}(f_n) = \{\xi_1, \cdots, \xi_N\} \subset \partial\Omega$$

を満たす。更に

$$
\begin{aligned}
&\|f - f_n;\ L^\infty(K)\| = \sup_{z\in K} |f(z) - f_n(z)| \\
&= \sup_{z\in K} \left| \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \sum_{j=1}^{N} R_{jn}(z) \right| \\
&= \sup_{z\in K} \left| \frac{1}{2\pi i} \sum_{j=1}^{N} \int_{\gamma_j} \left(\frac{1}{\zeta - z} + \sum_{k=0}^{n} \frac{(\zeta - \xi_j)^k}{(z - \xi_j)^{k+1}} \right) f(\zeta) d\zeta \right| \\
&= \sup_{z\in K} \left| \frac{1}{2\pi i} \sum_{j=1}^{N} \int_{\gamma_j} \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(\zeta - \xi_j)^k}{(z - \xi_j)^{k+1}} f(\zeta) d\zeta \right| \\
&\le \frac{1}{2\pi} \|f;\ L^\infty(\partial\Omega_N)\| \frac{1}{\delta_0} \sum_{k=n+1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k L(\gamma) \\
&= \frac{1}{2^{n+1}\pi\delta_0} \|f;\ L^\infty(\partial\Omega_N)\| L(\gamma) \\
&\to 0 \quad (n \to \infty)
\end{aligned}
$$

を得る。ここに $L(\gamma)$ は γ の長さである。

補題 2　$K \subset \mathbb{C}$ をコンパクト集合とし V を $\mathbb{C} \setminus K$ の一つの連結成分とする。V の異なる二点を a, b とする。$\mathrm{Pol}(f) = \{a\}$ なる $f_n \in \mathscr{R}(\mathbb{C})$ に対し $(f_n) \subset \mathscr{R}(\mathbb{C})$ が存在し任意の n に対し $\mathrm{Pol}(f_n) = \{b\}$ 且つ $\|f_n - f;\ L^\infty(K)\| \to 0\ (n \to \infty)$ を満たす。

(証明)　$f_n \in \mathscr{R}(\mathbb{C})$ は有限個の多項式 $(p_j;\ 0 \le j \le m)$ に依って

$$
f(z) = \sum_{j=0}^{m} \frac{p_j(z)}{(z-a)^j},\ z \in \mathbb{C} \setminus \{a\}
$$

と表される。$a,\ b \in V$ であるから $I = [0,1]$ 上の連続曲線 $\gamma : I \to \mathbb{C}$ が存在し $\gamma(I) \subset V,\ \gamma(0) = a,\ \gamma(0) = b$ を満たす。$\gamma(I)$ と K は互いに素なコンパクト集合であるから $\delta := d(\gamma(I),\ K)$ と置くと $\delta > 0$ となる。γ の一様連続性により I の有限個の点 $(t_\nu;\ 0 \le \nu \le l)$ を選んで

$$
0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_l = 1,\quad \max_{1\le\nu\le l} |\gamma(t_\nu) - \gamma(t_{\nu-1})| \le \frac{\delta}{2}
$$

とする。そこで $a_\nu = \gamma(t_\nu)$ と置く。このとき $a_0 = a,\ a_l = b$ であり

$$
\max_{1\le\nu\le l} \sup_{z\in K} \left| \frac{a_{\nu-1} - a_\nu}{z - a_\nu} \right| \le \frac{1}{2}
$$

が成立つ。K の $\delta/2$ 近傍上一様収束する冪級数展開

$$
\frac{1}{z - a_{\nu-1}} = \frac{1}{z - a_\nu} \frac{1}{1 - \frac{a_{\nu-1} - a_\nu}{z - a_\nu}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a_{\nu-1} - a_\nu)^k}{(z - a_\nu)^{k+1}}
$$

を $(j-1)$ 回項別微分して得られる冪級数展開

$$
\frac{1}{(z - a_{\nu-1})^j} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(j+k)!}{(j-1)!\ k!} \frac{(a_{\nu-1} - a_\nu)^k}{(z - a_\nu)^{k+j+1}}
$$

は K 上で一様に絶対収束する。そこで $R_n^{(\nu,j)} \in \mathscr{R}(\mathbb{C})$ を

$$R_n^{(\nu,j)}(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(j+k)!}{(j-1)!\ k!} \frac{(a_{\nu-1}-a_\nu)^k}{(z-a_\nu)^{k+j+1}},\ z \in \mathbb{C} \setminus \{a_\nu\}$$

で定義する。このとき、任意の $j \geq 1$ に対し

$$\begin{aligned}
&\max_{1\leq\nu\leq l} \sup_{z\in K} \left| \frac{1}{(z-a_{\nu-1})^j} - R_n^{(\nu,j)}(z) \right| \\
&= \max_{1\leq\nu\leq l} \sup_{z\in K} \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(j+k)!}{(j-1)!\ k!} \frac{(a_{\nu-1}-a_\nu)^k}{(z-a_\nu)^{k+j+1}} \right| \\
&\leq \max_{1\leq\nu\leq l} \sup_{z\in K} \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(j+k)!}{(j-1)!\ k!} \left| \frac{a_{\nu-1}-a_\nu}{z-a_\nu} \right|^k \frac{1}{|z-a_\nu|^{j+1}} \\
&\leq \frac{1}{\delta^{j+1}} \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(j+k)!}{(j-1)!\ k!} \frac{1}{2^k} \\
&\to 0 \quad (n\to\infty)
\end{aligned}$$

を得る。さて

$$f(z) = p_0(z) + \sum_{j=1}^{m} \frac{p_j(z)}{(z-a_0)^j}$$

に対し

$$f_n^{(1)} := p_0 + \sum_{j=1}^{m} p_j R_n^{(1,j)}$$

と置くと $f_n^{(1)} \in \mathscr{R}(\mathbb{C}),\ \mathrm{Pol}(f_n^{(1)}) = \{a_1\}$ であり

$$\|f - f_n^{(1)};\ L^\infty(K)\| \to 0 \quad (n \to \infty)$$

が従う。任意に $\varepsilon > 0$ を与える。$N_1 \geq 1$ が存在し

$$\|f - f_n^{(1)};\ L^\infty(K)\| \leq \varepsilon/l$$

を満たす。さて

$$f_{N_1}^{(1)} = p_0(z) + \sum_{j=1}^{m} \sum_{k_1=0}^{N_1} \frac{(k_1+j)!}{(j-1)!\ k_1!} \frac{(a_0-a_1)^{k_1} p_j(z)}{(z-a_1)^{k_1+j+1}}$$

に対し

$$f_n^{(2)} = p_0 + \sum_{j=1}^{m} \sum_{k_1=0}^{N_1} \frac{(k_1+j)!}{(j-1)!\ k_1!} (a_0-a_1)^{k_1} p_j R_n^{(2,\ k_1+j+1)}$$

と置くと $f_n^{(2)} \in \mathscr{R}(\mathbb{C}),\ \mathrm{Pol}(f_n^{(2)}) = \{a_2\}$ であり

$$\|f_{N_1}^{(1)} - f_n^{(2)};\ L^\infty(K)\| \to (n \to \infty)$$

が従う。これより $N_2 \geq 1$ が存在し

$$\|f^{(1)}_{N_1} - f^{(2)}_{N_2};\ L^\infty(K)\| \leq \varepsilon/l$$

を満たす。以下同様に $2 \leq \nu \leq l$ なる各 ν に対し $N_\nu \geq 1$ が定まり

$$f^{(\nu)}_n := p_0 + \sum_{j=1}^{m} \sum_{k_1=0}^{N_1} \cdots \sum_{k_{\nu-1}=0}^{N_{\nu-1}} \frac{(k_1 + \cdots + k_{\nu-1} + j + \nu - 2)!}{(j-1)!} \left(\prod_{\mu=1}^{\nu-1} \frac{(a_{\mu-1} - a_\mu)^{k_\mu}}{k_\mu !} \right) \cdot p_j R_n^{(\nu,\ k_1 + \ \cdots\ + k_{\nu-1} + j + \nu - 1)}$$

は $f^{(\nu)}_n \in \mathscr{R}(\mathbb{C}),\ \mathrm{Pol}(f^{(\nu)}_n) = \{a_\nu\}$ であり

$$\max_{2 \leq \nu \leq l-1} \|f^{(\nu-1)}_{N_{\nu-1}} - f^{(\nu)}_{N_\nu};\ L^\infty(K)\| \leq \varepsilon/l$$

を満たす。そこで $f_n := f^{(l)}_n$ と置くと $f_n \in \mathscr{R}(\mathbb{C}),\ \mathrm{Pol}(f_n) = \{b\}$ であり

$$\begin{aligned}
&\|f - f_n;\ L^\infty(K)\| \\
&\leq \|f - f^{(1)}_{N_1};\ L^\infty(K)\| + \sum_{\nu=2}^{l-1} \|f^{(\nu-1)}_{N_{\nu-1}} - f^{(\nu)}_{N_\nu};\ L^\infty(K)\| + \|f^{(l-1)}_{N_{l-1}} - f^{(l)}_n;\ L^\infty(K)\| \\
&\leq \frac{l-1}{l}\varepsilon + \|f^{(l-1)}_{N_{l-1}} - f^{(l)}_n;\ L^\infty(K)\|
\end{aligned}$$

より

$$\begin{aligned}
\limsup_{n\to\infty} \|f - f_n;\ L^\infty(K)\| &\leq \frac{l-1}{l}\varepsilon + \lim_{n\to\infty} \|f^{(l-1)}_{N_{l-1}} - f^{(l)}_n;\ L^\infty(K)\| \\
&= \frac{l-1}{l}\varepsilon
\end{aligned}$$

を満たす。これより $N_l \geq 1$ が存在し $n \geq N_l$ なる任意の n に対し

$$\|f - f_n;\ L^\infty(K)\| < \varepsilon$$

が従う。即ち $(f_n) \subset \mathscr{R}(\mathbb{C})$ が求めるものである。

補題 1 と 2 を用いてルンゲの近似定理の証明を与えよう。

ルンゲの近似定理の証明:

(2) ⇔ (3): 一般に $K \subset \widehat{K}_\Omega$ である事と次の同値性より (2) と (3) の同値性が従う：

$$\begin{aligned}
K \subsetneq \widehat{K}_\Omega &\Leftrightarrow \exists z_0 \in \widehat{K}_\Omega \setminus K \\
&\Leftrightarrow \exists z_0 \in \widehat{K}_\Omega \setminus K : \forall f \in \mathscr{O}(\Omega),\ |f(z_0)| \leq \|f;\ L^\infty(K)\|
\end{aligned}$$

(4) ⇔ (5): 言い換えに過ぎない。

(5) ⇔ (6) ⇔ (7): $V \subset \Omega$ に対し $\bar{V} \subset \bar{\Omega} = \Omega \sqcup \partial\Omega$ であるから

$$\bar{V} \subset \Omega \ \Leftrightarrow\ \bar{V} \cap \partial\Omega = \emptyset \ \Leftrightarrow\ \partial V \cap \partial\Omega = \emptyset$$

即ち

$$\bar{V} \not\subset \Omega \ \Leftrightarrow\ \bar{V} \cap \partial\Omega \neq \emptyset \ \Leftrightarrow\ \partial V \cap \partial\Omega \neq \emptyset$$

(1) ⇒ (4): $\Omega \setminus K$ の有界な連結成分 V であって $\bar{V} \subset \Omega$ なるものが存在すると仮定して矛盾を導こう。先ず $\partial V \subset K$ である事を示そう。もし $\partial V \not\subset K$ であるとすると $a \in \partial V \setminus K$ が存在する。このとき $\partial V \subset \bar{V} \subset \Omega$ 故 a は開集合 $\Omega \setminus K$ の元であり $\Omega \setminus K$ に含まれる a の ε - 近傍が存在する：

$$B(a;\varepsilon) \subset \Omega \setminus K$$

一方 $a \in \bar{V}$ 故 $B(a;\varepsilon) \cap V \neq \emptyset$ となり $B(a;\varepsilon) \cup V$ は $\Omega \setminus K$ の空でない連結開部分集合で $V \subsetneqq B(a;\varepsilon) \cup V$ が成立つ。これは V が連結成分である事に反する。故に $\partial V \subset K$ が成立つ。

さて V は有界な開集合であり $\partial V \subset K$ であるから、最大値原理に依り任意の $f \in \mathscr{O}(\Omega)$ に対し不等式

$$\|f;\ L^\infty(\bar{V})\| = \|f;\ L^\infty(\partial V)\| \leq \|f;\ L^\infty(K)\|$$

が従う。いま $z_0 \in V$ を一つ取り固定する。$z_0 \notin K$ 故 $\delta := d(z_0,\ K) > 0$ となる。
$U := \{z \in \Omega; d(z,\ K) < \delta/2\}$ と置くと U は $K \subset U \subset \Omega$ なる開集合であり $z_0 \notin U$ を満たす。また $z \in U$ に対し

$$f(z) = \frac{1}{z - z_0}$$

と置くと $f \in \mathscr{O}(U)$ が定まる。仮定 (1) に依り $(f_n) \subset \mathscr{O}(\Omega)$ が存在し

$$\|f_n - f;\ L^\infty(K)\| \to 0 \ \ (n \to \infty)$$

を満たす。これより

$$\begin{aligned}\sup_{z\in K}|f_n(z)(z - z_0) - 1| &= \sup_{z\in K}|z - z_0||f_n(z) - f(z)| \\ &\leq \sup_{z\in K}|z - z_0|\|f_n - f;\ L^\infty(K)\| \to 0 \ \ (n \to \infty)\end{aligned}$$

が従う。一方で $f_m - f_n \in \mathscr{O}(\Omega)$ 故

$$\begin{aligned}\|f_m - f_n;\ L^\infty(\bar{V})\| &= \|f_m - f_n;\ L^\infty(\partial V)\| \\ &\leq \|f_m - f_n;\ L^\infty(K)\| \to 0 \ \ (m, n \to \infty)\end{aligned}$$

となるので $g \in C(\bar{V})$ が存在し $g|V \in \mathscr{O}(V)$ 且つ

$$\|f_n - g;\ L^\infty(\bar{V})\| \to 0 \ \ (n \to \infty)$$

が成立つ。この時

$$
\begin{aligned}
&\sup_{z\in\bar{V}} |g(z)(z-z_0)-1| \\
&= \sup_{z\in\bar{V}} |(z-z_0)\left(g(z)-f_n(z)\right)+((z-z_0)f_n(z)-1)\,| \\
&\le \sup_{z\in\bar{V}} |z-z_0|\ |g(z)-f_n(z)| + \sup_{z\in\bar{V}} |(z-z_0)f_n(z)-1)| \\
&\le \sup_{z\in\bar{V}} |z-z_0|\ \|g-f_n;\ L^\infty(\bar{V})\| + \sup_{z\in\partial V} |f_n(z)(z-z_0)-1| \\
&\le \sup_{z\in\bar{V}} |z-z_0|\ \|g-f_n;\ L^\infty(\bar{V})\| + \sup_{z\in K} |f_n(z)(z-z_0)-1| \\
&\to 0\ (n\to\infty)
\end{aligned}
$$

が従うので任意の $z\in\bar{V}$ に対し等式

$$g(z)(z-z_0)=1$$

が成立つ。しかし、この等式は $z=z_0$ に対して成立せず、矛盾である。

(6) ⇒ (1): 開集合 $U\subset\mathbb{C}$ で $K\subset U\subset\bar{U}\subset\Omega$ 且つ $\bar{U}$ はコンパクトとなるものを取る。$f\in\mathscr{O}(U)$ を任意に与える。補題 1 により、有限個の $\xi_j\in\partial U$ 及び有理函数列 $(R_{jn};\ n\in\mathbb{Z}_{\ge1})\subset\mathscr{R}(\mathbb{C})$ $(j=1,\ \cdots,N)$ が存在し、次を満たす:

$$
\begin{gathered}
\mathrm{Pol}(R_{jn})=\{\xi_j\}\ \ \forall\, n\in\mathbb{Z}_{\ge1} \\
\|R_n-f;\ L^\infty(K)\|\to 0\ (n\to\infty)
\end{gathered}
$$

ここに $R_n=\displaystyle\sum_{j=1}^{N} R_{jn}\in\mathscr{R}(\mathbb{C})$ とする。

従って各 j に対し $\left(f_n^{(j)};\ n\in\mathbb{Z}_{\ge1}\right)\subset\mathscr{O}(\Omega)$ が存在し

$$\left\|R_{jn}-f_n^{(j)};\ L^\infty(K)\right\|\to 0\ (n\to\infty)$$

となる事を示せば充分であり $f_n=\displaystyle\sum_{j=1}^{N} f_n^{(j)}\in\mathscr{O}(\Omega)$ の成す正則函数列 (f_n) が求めるものとなる。

さて $\xi_j\in\partial U\subset\Omega\setminus K$ を取る。$\Omega\setminus K$ の連結成分 V が唯一つ存在し $\xi_j\in V$ を満たす。二つの場合に分けて考える。

V は有界の場合　仮定 (6) より $\bar{V}\cap\partial\Omega\neq\emptyset$ であるから $\eta_j\in\bar{V}\cap\partial\Omega$ が存在する。$\bar{V}$ は異なる二点 $\xi_j,\ \eta_j$ を含む連結集合であり $\xi_j,\ \eta_j\notin K$ であるから $\xi_j,\ \eta_j$ は $\mathbb{C}\setminus K$ の同じ連結成分に属す。補題 2 より各 $n\in\mathbb{Z}_{\ge1}$ に対し有理函数列 $(R_{jnl};\ l\in\mathbb{Z}_{\ge1})\subset\mathscr{R}(\mathbb{C})$ が存在し

$$
\begin{gathered}
\mathrm{Pol}(R_{jnl})=\{\eta_j\}\ \ \forall n,\ l\in\mathbb{Z}_{\ge1} \\
\|R_{jnl}-R_{jn};\ L^\infty(K)\|\to 0\ (l\to\infty)
\end{gathered}
$$

を満たす。従って部分列 $(l_n; n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}) \subset \mathbb{Z}_{\geq 1}$ を選び

$$l_1 < l_2 < \cdots < l_n \to \infty \ \ (n \to \infty)$$
$$\|R_{jnl_n} - R_{jn};\ L^\infty(K)\| < 1/n \ \ \forall n$$

とし $f_n^{(j)} := R_{jnl_n}|\ \Omega$ と置けば $(f_n^{(j)}\ ;\ n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}) \subset \mathscr{O}(\Omega)$ が求めるものとなる。

V は非有界の場合　$K \subset B(0; r)$ なる $r > 0$ を取る。V は非有界であるから $(\mathbb{C} \setminus B(0; r)) \cap V \neq \emptyset$ であり $\eta_j \in (\mathbb{C} \setminus B(0; r)) \cap V$ が存在する。V は $\xi_j,\ \eta_j$ を含む連結集合であり $\xi_j,\ \eta_j \notin K$ であるから $\xi_j,\ \eta_j$ は $\mathbb{C} \setminus K$ の同じ連結成分に属す。補題 2 より各 $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ に対し有理函数列 $(R_{jnl};\ l \in \mathbb{Z}_{\geq 1}) \subset \mathscr{R}(\mathbb{C})$ が存在し

$$\mathrm{Pol}(R_{jnl}) = \{\eta_j\} \ \ \forall n,\ l \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$$
$$\|R_{jnl} - R_{jn};\ L^\infty(K)\| \to 0\ (l \to \infty)$$

を満たす。特に部分列 $(l_n;\ n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}) \subset \mathbb{Z}_{\geq 1}$ を選んで

$$l_1 < l_2 < \cdots < l_n \to \infty \ \ (n \to \infty)$$
$$\|R_{jnl_n} - R_{jn};\ L^\infty(K)\| < 1/n \ \ \forall n$$

としておく。このとき $l \geq k$ なる $k,\ l \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ に対し

$$\begin{aligned}
&\sup_{z \in K} \left| \frac{1}{(z - \eta_j)^k} + \sum_{m=k-1}^{l} \frac{m!}{(m-k+1)!\ \eta_j^{m+1}}\ z^{m-k+1} \right| \\
&= \sup_{z \in K} \left| \frac{1}{\eta_j^k}\ \frac{1}{(1 - z/\eta_j)^k} - \frac{1}{\eta_j} \sum_{m=k-1}^{l} \frac{m!}{(m-k+1)!} \left(\frac{z}{\eta_j}\right)^{m-k+1} \right| \\
&= \frac{1}{|\eta_j|^k} \sup_{z \in K} \left| \sum_{m=l+1}^{\infty} \frac{m!}{(m-k+1)!} \left(\frac{z}{\eta_j}\right)^{m-k+1} \right| \\
&\leq \frac{1}{|\eta_j|^k} \sum_{m=l+1}^{\infty} \frac{m!}{(m-k+1)!} \left(\frac{r}{|\eta_j|}\right)^{m-k+1} \to 0\ (l \to \infty)
\end{aligned}$$

であるから多項式列 $(p_{jn};\ n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}) \subset \mathscr{P}(\mathbb{C})$ を選んで

$$\|p_{jn} - R_{jnl_n};\ L^\infty(K)\| < 1/n \ \ \forall n$$

とする事が出来る。よって $f_n^{(j)} := p_{jn}|\ \Omega$ と置けば $(f_n^{(j)};\ n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}) \subset \mathscr{O}(\Omega)$ が求めるものとなる。

(2) $\Rightarrow$ (4): 対偶を示す。$\Omega \setminus K$ の有界な連結成分 V で $\bar{V} \subset \Omega$ なるものが存在すると仮定する。このとき (1) $\Rightarrow$ (4) の証明に於ける議論に拠り $\partial V \subset K$ が従い、最大値原理に依り任意の $f \in \mathscr{O}(\Omega)$ に対し不等式

$$\|f;\ L^\infty(\bar{V})\| = \|f;\ L^\infty(\partial V)\| \leq \|f;\ L^\infty(K)\|$$

が成立つが、これは (2) に反する。

(6) ⇒ (2): 既に (1) ⇔ (4) ⇔ (5) ⇔ (6) ⇔ (7) を証明したので、これら同値な命題を用いて (2) を導けば充分である。$z_0 \in \Omega \setminus K$ を任意に取る。$\delta := d(z_0;\ K) > 0$ と置く。このとき $\overline{B(z_0;\ \delta/4)} \subset \Omega \setminus K$ であり $K' := K \cup \overline{B(z_0;\ \delta/4)}$ と置く。$\Omega \setminus K'$ の任意の有界連結成分 V は $V \cap \overline{B(z_0;\ \delta/4)} = \emptyset$ 故 $\Omega \setminus K$ の有界連結成分となり、仮定 (6) より $\bar{V} \cap \partial\Omega \neq \emptyset$ を満たす。いま

$$U := K_{\delta/2} \cup B(z_0;\ \delta/2),\ K_{\delta/2} := \{z \in \mathbb{C};\ d(z; K) < \delta/2\}$$

と置くと U は $K' \subset U \subset \Omega$ なる開集合であり $K_{\delta/2} \cap B(z_0;\ \delta/2) = \emptyset$ となっている。$K_{\delta/2}$ 上 $g \equiv 0$ で $B(z_0;\ \delta/2)$ 上 $g \equiv 1$ として $g \in \mathscr{O}(U)$ が定まる。K' 及び g を夫々K 及び f として (1) を適用すると g の近似函数として $f \in \mathscr{O}(\Omega)$ が存在し

$$\|f - g;\ L^\infty(K')\| < 1/2$$

を満たす。このとき

$$\begin{aligned}
&\|f;\ L^\infty(K)\| = \|f - g;\ L^\infty(K)\| < 1/2\\
&\|f - 1;\ L^\infty(\overline{B(z_0;\ \delta/4)})\| = \|f - g;\ L^\infty(\overline{B(z_0;\ \delta/4)})\| < 1/2
\end{aligned}$$

より

$$\begin{aligned}
|f(z_0)| &= |1 - (1 - f(z_0))\,|\\
&\geq 1 - |f(z_0) - 1|\\
&\geq 1 - \|f - 1;\ L^\infty(\overline{B(z_0;\ \delta/4)})\| > 1/2 > \|f;\ L^\infty(K)\|
\end{aligned}$$

が成立つ。

ルンゲの近似定理の系

コンパクト集合 $K \subset \mathbb{C}$ に対し次は同値である。

(1) $K \subset U$ なる任意の開集合 U 及び任意の $f \in \mathscr{O}(U)$ に対し $(p_n) \subset \mathscr{P}(\mathbb{C})$ が存在し $\|p_n - f;\ L^\infty(K)\| \to 0\ (n \to \infty)$ を満たす。

(2) $K \subset U$ なる任意の開集合で次の性質を持つものが存在する:
任意の $f \in \mathscr{O}(U)$ に対し $(p_n) \subset \mathscr{O}(\mathbb{C})$ が存在し $\|p_n - f;\ L^\infty(K)\|(n \to \infty)$ を満たす。

(3) $\mathbb{C} \setminus K$ は連結である。

（証明）$\Omega = \mathbb{C}$ としてルンゲの近似定理（の証明）を適用すれば良い。

２．正則凸包の構造とルンゲ増大被覆の存在

この節では、開集合 $\Omega \subset \mathbb{C}$ に含まれるコンパクト集合 K を $\Omega \setminus K$ の連結成分との関連で考察し、正則凸包の構造定理とルンゲ増大被覆の存在定理に結び付けよう。

命題１　開集合 $\Omega \subset \mathbb{C}$ とコンパクト集合 $K \subset \mathbb{C}$ は包含関係 $K \subset \Omega$ を満たしているものとする。$(V_\lambda;\ \lambda \in \Lambda)$ を $\Omega \setminus K$ の有界連結成分の族で $\overline{V_\lambda} \subset \Omega$ なるものの全体とする。このとき添字集合 Λ は高々可算であり K に $(V_\lambda;\ \lambda \in \Lambda)$ を全て付け加えた集合

$$K_0 := K \sqcup \bigcup_{\lambda \in \Lambda} V_\lambda$$

はコンパクトである。

（証明）**添字集合 $\boldsymbol{\Lambda}$ は高々可算である事：**
任意の $\lambda \in \Lambda$ に対し V_λ は空でない開集合であるから $v_\lambda \in \mathbb{Q}^2 \cap V_\lambda$ が存在する。全ての $\lambda \in \Lambda$ に対し $v_\lambda \in \mathbb{Q}^2 \cap V_\lambda$ を選ぶ事に依り、写像 $\varphi : \Lambda \ni \lambda \mapsto \varphi(\lambda) := v_\lambda \in \mathbb{Q}^2$ が定まる。$\lambda,\ \mu \in \Lambda$ に対し $\lambda \neq \mu$ と $V_\lambda \cap V_\mu = \emptyset$ は同値でであるので φ は単射である。$\mathbb{Q}^2$ は可算であるから $\varphi(\Lambda)$ は高々可算である。$\varphi : \Lambda \ni \lambda \mapsto \varphi(\lambda) \in \varphi(\Lambda)$ は全単射であるから Λ は高々可算である。

$\boldsymbol{K_0}$ **は有界集合である事：**
K_0 は非有界と仮定して矛盾を導こう。先ず K は有界故 $R > 0$ が存在し $K \subset \overline{B(0;R)}$ が成立つ。K_0 は非有界故 $K_0 \subset \overline{B(0;2R)}$ とは成り得ず $K_0 \not\subset \overline{B(0;2R)}$ が従う。即ち $v \in K_0$ であって $|v| > 2R$ なる元 v が存在する。このとき $v \in K_0 \setminus K$ 故、唯一つの $\lambda \in \Lambda$ が存在し $v \in V_\lambda$ を満たす。さて $V := \mathbb{C} \setminus \overline{B(0;R)}$ と置くと V は $V \subset \mathbb{C} \setminus K$ なる連結集合で $v \in V$ となるから $V \subset V_\lambda$ が従う。これより V_λ は非有界となり矛盾を生ずる。

$\boldsymbol{K_0}$ **は閉集合である事：**
$\bar{K}_0 \setminus K_0$ の元 ζ が存在すると仮定して矛盾を導く。K_0 の定義から導かれる包含関係 $K_0 = K \sqcup \bigcup_{\lambda \in \Lambda} V_\lambda \subset K \sqcup (\Omega \setminus K) = \Omega$ より $\bar{K}_0 \subset \bar{\Omega} = \Omega \sqcup \partial\Omega$ が従うので $\zeta \in \Omega$ または $\zeta \in \partial\Omega$ のどちらか一方が成立する。

もし $\zeta \in \Omega$ ならば $\zeta \notin K_0$ 且つ $\zeta \in \Omega \setminus K$ 故 $\Omega \setminus K$ の非有界連結成分 V が存在して $\zeta \in V$ となる。このとき $\zeta \in \bar{K}_0 \cap V$ であるから特に $K_0 \cap V \neq \emptyset$ となり $z \in V \cap K_0$ が存在する。$V \subset \Omega \setminus K$ 故 $z \in \bigcup_{\lambda \in \Lambda} V_\lambda$ となり $z \in V_\lambda$ なる $\lambda \in \Lambda$ が存在する。V_λ は連結成分故 $V_\lambda = V$ となるが V_λ は有界であり矛盾が生じる。従って $\zeta \in \partial\Omega$ となる。

さて $\delta := d(K,\ \mathbb{C} \setminus \Omega) > 0$ と置く。$\zeta \in \bar{K}_0$ に対し $(z_n) \subset K_0$ が存在し $z_n \to \zeta (n \to \infty)$ を満たす。このとき $\zeta \notin \Omega$ より

$$\begin{aligned} d(z_n,\ \mathbb{C} \setminus \Omega) &= \inf\{|z_n - \xi|; \xi \in \mathbb{C} \setminus \Omega\} \\ &\leq \inf\{|z_n - \zeta| + |\zeta - \xi|;\ \xi \in \mathbb{C} \setminus \Omega\} \\ &= |z_n - \zeta| \to 0\ (n \to \infty) \end{aligned}$$

となる。そこで $d(z_n,\, \mathbb{C}\backslash\Omega) < \delta/2$ なる $z_n \in K_0$ を一つ取る。このとき $B(z_n;\ d(z_n,\, \mathbb{C}\backslash\Omega)) \subset \Omega \setminus K$ である事を示そう。実際 $|z - z_n| < d(z_n,\ \mathbb{C} \setminus \Omega)$ なる $z \in \mathbb{C}$ に対し $z \notin \Omega$ であるとすると $d(z_n,\ \mathbb{C} \setminus \Omega) = \inf\{|z - \xi|;\ \xi \notin \Omega\} \leq |z_n - z|$ となり矛盾であり

$$
\begin{aligned}
d(z_n,\ \mathbb{C} \setminus \Omega) &= \inf\{|z_n - \xi|; \xi \in \mathbb{C} \setminus \Omega\} \\
&\leq \inf\{|z - z_n| + |z_n - \xi|; \xi \in \mathbb{C} \setminus \Omega\} \\
&= |z - z_n| + \inf\{|z_n - \xi|; \xi \in \mathbb{C} \setminus \Omega\} \\
&< 2d(z_n,\ \mathbb{C} \setminus \Omega) < \delta
\end{aligned}
$$

より $z \notin K$ が従うからである。

さて以上より

$$z_n \in K_0 \cap (\Omega \setminus K) = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} V_\lambda$$

となるので $z_n \in V_\lambda$ なる $\lambda \in \Lambda$ が存在する。$B\,(z_n;\ d(z_n,\ \mathbb{C}\backslash\Omega))$ は $\Omega \setminus K$ の有界連結部分集合であるから $B\,(z_n;\ d(z_n,\ \mathbb{C}\backslash\Omega)) \subset V_\lambda$ となる。このとき

$$\emptyset \neq \partial\Omega \cap \overline{B\,(z_n;\ d(z_n,\ \mathbb{C}\backslash\Omega))} \subset \partial\Omega \cap \overline{V_\lambda}$$

となり $\overline{V_\lambda} \subset \Omega$ に反する。従って $\overline{K_0} \setminus K_0$ の元は存在しない。これが示すべき事であった。

命題２（正則凸包の構造定理）

開集合 $\Omega \subset \mathbb{C}$ とコンパクト開集合 $K \subset \mathbb{C}$ は包含関係 $K \subset \Omega$ を満たしているものとする。K の Ω に対する正則凸包 $\widehat{K}_\Omega$ を

$$\widehat{K}_\Omega := \{z \in \Omega; |f(z)| \leq \|f;\ L^\infty(K)\|\ \forall\ f \in \mathscr{O}(\Omega)\}$$

と定義する。$(V_\lambda;\ \lambda \in \Lambda)$ を $\Omega \setminus K$ の有界連結成分の族 $\overline{V_\lambda} \subset \Omega$ なるものの全体とする。このとき添字集合 Λ は高々可算で $\widehat{K}_\Omega$ はコンパクトであり

$$\widehat{K}_\Omega = K \sqcup \bigcup_{\lambda \in \Lambda} V_\lambda$$

が成立つ。

（証明）命題 1 の K_0 に対し $\widehat{K}_\Omega = K_0$ を示せば充分である。

$\boldsymbol{K_0 \subset \hat{K}_\Omega}$ **なる事：**

$\bigcup_{\lambda \in \Lambda} V_\lambda \subset \widehat{K}_\Omega$ を示せば良い。任意に $\lambda \in \Lambda$ を取る。V_λ は $\Omega \setminus K$ の有界連結成分であって $\overline{V_\lambda} \subset \Omega$ を満たす。ルンゲの近似定理の (1) $\Rightarrow$ (5) の議論に拠り $\partial V_\lambda \subset K$ であり任意の $f \in \mathscr{O}(\Omega)$ に対し不等式

$$\|f;\ L^\infty(\overline{V_\lambda})\| = \|f;\ L^\infty(\partial V_\lambda)\| \leq \|f;\ L^\infty(K)\|$$

が成立つ。これより $V_\lambda \subset \widehat{K}_\Omega$ が従う。故に $K_0 \subset \widehat{K}_\Omega$ が成立つ。

$\hat{K}_\Omega \subset K_0$ なる事：

命題 1 に因り K_0 はコンパクトであり $K_0 \subset \Omega$ を満たし、定義により $\Omega \setminus K_0$ の有界連結成分 V であって $\bar{V} \subset \Omega$ なるものは存在しない。故にルンゲの近似定理に拠り $K_0 = (K_0)\hat{_\Omega}$ が従う。一方 $K \subset K_0$ より $\widehat{K}_\Omega \subset (K_0)\hat{_\Omega}$ となるので $\widehat{K}_\Omega \subset (K_0)\hat{_\Omega} = K_0$ が従う。

定義　開集合 $\Omega \subset \mathbb{C}$ に対し Ω の開被覆を成す開集合列 $(U_n;\ n \in \mathbb{Z}_{\geq 1})$ は次の条件 (i)(ii) を満たすとき**ルンゲ増大被覆**と謂う：

(i) 任意の $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ に対し U_n は有界で $\bar{U}_n \subset U_{n+1}$

(ii) コンパクト集合 $\bar{U}_n$ の近傍で正則な任意の函数は Ω 上の正則函数列の $\bar{U}_n$ 上の一様収束極限として表される。

定理 2（ルンゲ増大被覆の存在定理）

複素平面内の任意の開集合はルンゲ増大被覆を持つ。

（証明）各 $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ に対し

$$V_n := \{z \in \Omega;\ d(z,\ \partial\Omega) > 1/n,\ |z| < n\}$$

と置くと

$$\bar{V}_n \subset V_{n+1}(\ \forall\ n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}),\quad \Omega = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}} V_n$$

となる。コンパクト集合 $\bar{V}_n$ と開集合 V_{n+1} に対し命題 1 を適用し $(\bar{V}_n)_0$ を構成する。その構成に現れる $V_{n+1} \setminus \bar{V}_n$ の有界連結成分でその閉包が V_{n+1} に含まれるもの全体の合併を $\widetilde{V}_n$ と置く：$(\bar{V}_n)_0 = \bar{V}_n \sqcup \widetilde{V}_n$
$(\bar{V}_n)_0$ の内点の全体を $W_n := \mathrm{Int}(\bar{V}_n)_0$ とする。このとき $V_n \subset \bar{V}_n \subset (\bar{V}_n)_0$ より $V_n = \mathrm{Int}V_n \subset \mathrm{Int}(\bar{V}_n)_0 = W_n$ が従う。更に $\bar{W}_n = (\bar{V}_n)_0$ が成立つ。実際 $W_n = \mathrm{Int}(\bar{V}_n)_0 \subset (\bar{V}_n)_0$ より $\bar{W}_n \subset \overline{(\bar{V}_n)_0} = (\bar{V}_n)_0$ が従い $V_n \sqcup \widetilde{V}_n \subset (\bar{V}_n)_0$ より $V_n \sqcup \widetilde{V}_n = \mathrm{Int}(V_n \sqcup \widetilde{V}_n) \subset \mathrm{Int}(\bar{V}_n)_0 = W_n$ またこれより $(\bar{V}_n)_0 = \bar{V}_n \sqcup \widetilde{V}_n \subset \bar{V}_n \sqcup \overline{\widetilde{V}_n} = \overline{V_n \sqcup \widetilde{V}_n} \subset \bar{W}_n$ が従うからである。

さて $U_1 := W_1,\ n_1 := 1$ とする。$\bar{U}_1 = \bar{W}_1 = (\bar{V}_1)_0$ は Ω 内のコンパクト集合なので $n_2 \geq n_1$ が存在して $\bar{U}_1 \subset V_{n_2}$ を満たす。そこで $U_2 := W_{n_2}$ とする。このとき $U_1 \subset \bar{U}_1 \subset V_{n_2} \subset W_{n_2} = U_2$ が成立つ。これを繰り返し $n_1 \leq n_2 \leq \cdots \leq n_j,\ U_j = W_{n_j},\ \bar{U}_j \subset V_{n_{j+1}}$ が全ての $j \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ に対して定まる。このとき $U_j \subset \bar{U}_j \subset V_{n_{j+1}} \subset W_{n_{j+1}} = U_{j+1}$ が成立ち $\Omega = \bigcup_{j \in \mathbb{Z}_{\geq 1}} U_j$ であり U_j は有界な開集合である。命題 2 より $\bar{U}_j = \overline{W_{n_j}} = (\bar{V}_{n_j})_0$ は $(\bar{U}_j)\hat{_\Omega} = \big((\bar{V}_{n_j})_0\big)\hat{_\Omega} = (\bar{V}_{n_j})_0 = \bar{U}_j$ を満たす。ルンゲの近似定理により $\bar{U}_j$ の近傍で正則な函数は Ω 上の正則函数列の $\bar{U}_j$ 上の一様収束極限である。

３．非斉次コーシー・リーマン方程式の解法

この節では開集合 $\Omega \subset \mathbb{C}$ 上の非斉次コーシー・リーマン方程式

$$\frac{\partial u}{\partial \bar{z}} = f$$

の解法に就いて考える。ここに $f : \Omega \to \mathbb{C}$ は与えられた函数で実の意味で滑らかであり $u : \Omega \to \mathbb{C}$ はコーシー・リーマン方程式を満たす（実の意味で）滑らかな函数とし、左辺の偏微分作用素は

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)$$

で定義されるものとする。次の命題は基本的である。

命題３　$f \in C_0^\infty(\mathbb{C})$ 及び $z \in \mathbb{C}$ に対し

$$\begin{aligned} u(z) &:= \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{C}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \wedge d\bar{\zeta} \\ &= -\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}^2} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\xi d\eta \end{aligned}$$

と置く。ここに $\zeta = \xi + i\eta \in \mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$ とし $d\zeta \wedge d\bar{\zeta} = (d\xi + id\eta) \wedge (d\xi - id\eta) = -2id\xi \wedge d\eta$ である事を用いている。このとき $\mathbb{C} \ni z \mapsto u(z) \in \mathbb{C}$ として与えられる函数 u は $u \in C^\infty(\mathbb{C})$ であり $\mathbb{C}$ 上

$$\frac{\partial u}{\partial \bar{z}} = f$$

を満たす。

複素平面上の非斉次コーシー・リーマン方程式の解の存在定理としての命題 3 を用いて任意の開集合に一般化しよう。

定理３（非斉次コーシー・リーマン方程式の解の存在定理）

$\Omega \subset \mathbb{C}$ を開集合とする。このとき任意の $f \in C^\infty(\Omega)$ に対して非斉次コーシー・リーマン方程式は $u \in C^\infty(\Omega)$ なる解を持つ。

（証明）Ω に対するルンゲ増大被覆 $(U_n;\ n \in \mathbb{Z}_{\geq 1})$ を取る。$(\varphi_j;\ j \in \mathbb{Z}_{\geq 1}) \subset C_0^\infty(\Omega)$ を U_{j+1} 上 $\varphi_j = 1$ となる様に取り $\psi_1 = \varphi_1,\ \psi_j = \varphi_j - \varphi_{j-1} (j \geq 2)$ と置く。このとき任意の $j \geq 2$ に対し U_j 上 $\varphi_{j-1} = 1$ であり（$U_j \subset U_{j+1}$ であるから）$\varphi_j = 1$ でもあるので U_j 上 $\psi_j = 0$ となる。また構成法上 $(\psi_j;\ j \in \mathbb{Z}_{\geq 1})$ は Ω の一の分解

$$\sum_{j=1}^{\infty} \psi_j = 1$$

を成している。さて $f \in C^\infty(\Omega)$ 及び $j \geq 1$ に対し $f\psi_j \in C_0^\infty(\Omega)$ が定まるが $\mathbb{C} \backslash \Omega$ 上零拡張したものを同じ記号で表す事で $f\psi_j \in C_0^\infty(\mathbb{C})$ が定まる。このとき命題３より $u_j \in C^\infty(\mathbb{C})$ が存在し $\mathbb{C}$ 上で

$$\frac{\partial u_j}{\partial \bar{z}} = f\psi_j$$

を満たす。各 $j \geq 2$ に対し U_j 上 $f\psi_j = 0$ であるので u_j は U_j 上正則となる。ルンゲ被覆の性質 (ii) より $u_j|U_j \in \mathscr{O}(U_j)$ は Ω 上の正則函数列の $\overline{U_{j-1}}$ 上の一様収束極限として表される。従って各 $j \geq 2$ に対し $v_j \in \mathscr{O}(\Omega)$ が存在し $\left\| u_j - v_j;\ L^\infty(\overline{U_{j-1}}) \right\| \leq 2^{-j}$ を満たす。$v_1 \in \mathscr{O}(\Omega)$ を任意に取り

$$u := \sum_{j=1}^{\infty}(u_j - v_j)$$

と置く。さて任意の $k \geq 2$ に対し $(u_j - v_j)|U_j \in \mathscr{O}(U_j)$ を満たす $(u_j - v_j)|\Omega \in C^\infty(\Omega)$ を項とする函数項級数

$$\sum_{j=k}^{\infty}(u_j - v_j)$$

は $L^\infty(\overline{U_{k-1}})$ で収束するので $\left(\sum_{j=k}^{\infty}(u_j - v_j)\right) \Big| U_{k-1} \in \mathscr{O}(U_{k-1})$ が定まる。以上より、函数項級数 $u = \sum_{j=1}^{\infty}(u_j - v_j)$ 及びその全ての導函数に対する項別微分に依る函数項級数は Ω の任意のコンパクト集合上一様収束する。従って $u \in C^\infty(\Omega)$ となり、項別微分に依る等式

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial \bar{z}} &= \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\partial}{\partial \bar{z}}\ (u_j - v_j) \\
&= \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\partial}{\partial \bar{z}}\ u_j = \sum_{j=1}^{\infty} f\psi_j = f
\end{aligned}$$

が得られる。故に $u \in C^\infty(\Omega)$ が求めるものである。

４．ミッタク・レフラーのコホモロジー消滅定理

定理４（ミッタク・レフラーのコホモロジー消滅定理 その１）

開集合 $\Omega \subset \mathbb{C}$ の開被覆 $(U_\lambda;\ \lambda \in \Lambda)$ に対し正則函数の族 $(f_{\lambda\mu} \in \mathscr{O}(U_\lambda \cap U_\mu); (\lambda, \mu) \in \Lambda_I^2)$, $\Lambda_I^2 := \{(\lambda, \mu) \in \Lambda^2; U_\lambda \cap U_\mu \neq \emptyset\}$ は次の (i)(ii) の条件を満たしているものとする：

(i) **（交代条件（alternating condition））** 任意の $(\lambda, \mu) \in \Lambda_I^2$ に対し $U_\lambda \cap U_\mu$ 上の等式 $f_{\lambda\mu} = -f_{\mu\lambda}$ が成立つ。

(ii) **（余輪体条件（cocycle condition））** 任意の $(\lambda, \mu, \nu) \in \Lambda_I^3 := \{(\lambda, \mu, \nu) \in \Lambda^3;$ $U_\lambda \cap U_\mu \cap U_\nu \neq \emptyset\}$ に対し $U_\lambda \cap U_\mu \cap U_\nu \neq$ 上の等式

$$f_{\lambda\mu} + f_{\mu\nu} + f_{\nu\lambda} = 0$$

が成立つ。

このとき正則函数の族 $(f_\lambda \in \mathscr{O}(U_\lambda);\ \lambda \in \Lambda)$ が存在し任意の $(\lambda, \mu) \in \Lambda_I^2$ に対し $U_\lambda \cap U_\mu$ 上の等式

$$f_{\lambda\mu} = f_\mu - f_\lambda$$

が成立つ。

（証明）$(\varphi_\lambda; \lambda \in \Lambda)$ を開被覆 $(U_\lambda; \lambda \in \Lambda)$ に付随する滑らかな単位の分割とする。即ち各 $\lambda \in \Lambda$ に対し $\varphi_\lambda \in C_0^\infty(\Omega; \mathbb{R})$ は非負 $(\varphi_\lambda \geq 0)$ であり、その台は U_λ に含まれ $(\mathrm{supp}\ \varphi_\lambda \subset U_\lambda)$、台の成すコンパクト集合族は局所有限（$\Omega$ の任意のコンパクト部分集合 K に対し $\{\lambda \in \Lambda; \mathrm{supp}\ \varphi_\lambda \cap K\}$ は有限集合）で、局所有限な総和は恒等的に 1（$\sum_{\lambda \in \Lambda} \varphi_\lambda = 1$ が Ω 上の等式として成立つ）であるものとする。さて各 $\lambda \in \Lambda$ に対し

$$g_\lambda := \sum_{\mu \in \Lambda_\lambda} \varphi_\mu f_{\mu\lambda}$$

と置く。ここに $\Lambda_\lambda := \{\mu \in \Lambda;\ (\lambda, \mu) \in \Lambda_I\}$ とする。交代条件と余輪体条件に因り $(\lambda, \mu) \in \Lambda_I^2$ に対する $U_\lambda \cap U_\mu$ 上の等式として

$$\begin{aligned}
g_\lambda - g_\mu &= \sum_{\nu \in \Lambda_\lambda \cap \Lambda_\mu} \varphi_\nu (f_{\nu\lambda} - f_{\nu\mu}) \\
&= \sum_{\nu \in \Lambda_\lambda \cap \Lambda_\mu} \varphi_\nu (f_{\nu\lambda} + f_{\mu\nu}) \\
&= \sum_{\nu \in \Lambda_\lambda \cap \Lambda_\mu} \varphi_\nu (-f_{\lambda\mu}) \\
&= \sum_{\nu \in \Lambda_\lambda \cap \Lambda_\mu} \varphi_\nu f_{\mu\lambda} = f_{\mu\lambda} \sum_{\nu \in \Lambda_\lambda \cap \Lambda_\mu} \varphi_\nu = f_{\mu\lambda} \sum_{\nu \in \Lambda} \varphi_\nu = f_{\mu\lambda}
\end{aligned}$$

が成立つ。さて $f_{\mu\lambda} \in \mathscr{O}(U_\lambda \cap U_\mu)$ はコーシー・リーマン方程式を満たす為 $U_\lambda \cap U_\mu$ 上の等式として

$$\frac{\partial g_\lambda}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial g_\mu}{\partial \bar{z}}$$

が成立つ。この関係式を接続条件として、各 $\lambda \in \Lambda$ に対し U_λ 上

$$f|U_\lambda := -\frac{\partial g_\lambda}{\partial \bar{z}}$$

と置けば $f : \Omega \to \mathbb{C}$ が定まる。$g_\lambda \in C^\infty(\Omega)$ 故 $f \in C^\infty(\Omega)$ となり定理 3 より Ω 上

$$\frac{\partial u}{\partial \bar{z}} = f$$

を満たす $u \in C^\infty(\Omega)$ の存在が導かれる。さて $f_\lambda := g_\lambda + u$ と置く。このとき $(\lambda, \mu) \in \Lambda_I^2$ に対する $U_\lambda \cap U_\mu$ 上の等式として

$$f_{\lambda\mu} = g_\lambda - g_\mu = (f_\lambda - u) - (f_\mu - u) = f_\lambda - f_\mu$$

が成立ち f_λ は U_λ 上のコーシー・リーマン方程式

$$\frac{\partial f_\lambda}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial g_\lambda}{\partial \bar{z}} + \frac{\partial u}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial g_\lambda}{\partial \bar{z}} + f = 0$$

を満たすので $f_\lambda \in \mathscr{O}(U_\lambda)$ となる。

定理５（クザンの加法的問題の解答）

開集合 $\Omega \subset \mathbb{C}$ の開被覆 $(U_\lambda;\ \lambda \in \Lambda)$ に対し有理型函数の族 $\mathscr{V} = (f_\lambda \in \mathscr{M}(U_\lambda);\ \lambda \in \Lambda)$ は次の条件を満たしているものとする：
任意の $(\lambda, \mu) \in \Lambda_I^2 := \{(\lambda, \mu) \in \Lambda^2;\ U_\lambda \cap U_\mu \neq \emptyset\}$ に対し

$$f_\mu - f_\lambda \in \mathscr{O}(U_\lambda \cap U_\mu)$$

このとき $f \in \mathscr{M}(\Omega)$ が存在し、任意の $\lambda \in \Lambda$ に対し

$$f - f_\lambda \in \mathscr{O}(U_\lambda)$$

を満たす。

（証明）各 $(\lambda, \mu) \in \Lambda_I$ に対し $f_{\lambda\mu} := f_\mu - f_\lambda \in \mathscr{O}(U_\lambda \cap U_\mu)$ と置く。このとき

$$\begin{aligned} f_{\lambda\mu} &= f_\mu - f_\lambda = -(f_\lambda - f_\mu) = -f_{\mu\lambda}, \\ f_{\lambda\mu} + f_{\mu\nu} + f_{\nu\lambda} &= (f_\mu - f_\lambda) + (f_\nu - f_\mu) + (f_\lambda - f_\nu) = 0 \end{aligned}$$

より $(f_{\lambda\mu}; (\lambda, \mu) \in \Lambda_I)$ は定理４の交代条件及び余輪体条件を満たしている。従って $(g_\lambda \in \mathscr{O}(U_\lambda);\ \lambda \in \Lambda)$ が存在し、任意の $(\lambda, \mu) \in \Lambda_I^2$ に対し $U_\lambda \cap U_\mu$ 上の等式

$$f_{\lambda\mu} = g_\mu - g_\lambda$$

を満たす。これより直ちに任意の $(\lambda, \mu) \in \Lambda_I^2$ に対し $U_\lambda \cap U_\mu$ 上の等式

$$f_\mu - f_\lambda = g_\mu - g_\lambda$$

が $\mathscr{O}(U_\lambda \cap U_\mu)$ として成立つが、これは一方で $U_\lambda \cap U_\mu$ 上の新たな等式

$$f_\mu - g_\mu = f_\lambda - g_\lambda$$

が $\mathscr{M}(U_\lambda \cap U_\mu)$ として成立つ事を意味する。この関係式を接続条件として各 $\lambda \in \Lambda$ に対し U_λ 上

$$f \mid U_\lambda := f_\lambda - g_\lambda$$

と置けば $f \in \mathscr{M}(\Omega)$ が定まり

$$f - f_\lambda = -g_\lambda \in \mathscr{O}(U_\lambda)$$

を満たす。

位相空間 X の各開集合 V に対して一つのベクトル空間 $\mathscr{F}(V)$ が与えられ、包含関係 $U \subset V$ を持つ開集合の対 U, V に対して線型写像 $\iota_U^V : \mathscr{F}(V) \to \mathscr{F}(U)$ が定義され、次の条件を満たしているものとする：

(S0)　任意の開集合 U に対し $\iota_U^U : \mathscr{F}(U) \to \mathscr{F}(U)$ は恒等写像であり $U \subset V \subset W$ を満たす開集合 U, V, W の組に対して定まる線型写像

$$\iota_V^W : \mathscr{F}(W) \to \mathscr{F}(V),\ \iota_U^V : \mathscr{F}(V) \to \mathscr{F}(U),\ \iota_U^W : \mathscr{F}(W) \to \mathscr{F}(U)$$

は**両立条件** (compatibility condition)

$$\iota_U^V \circ \iota_V^W = \iota_U^W$$

を満たす。

このとき $\mathscr{F} = \big((\mathscr{F}(V)), (\iota_U^V)\big)$ を X 上のベクトル空間の**前層** (presheaf of vector spaces on X) または X 上の前層 (presheaf on X) と謂う。

X 上の前層 $\mathscr{F}$ と X の開集合 Ω の開被覆 $\mathscr{U} = (U_\lambda;\ \lambda \in \Lambda)$ に対し、積空間

$$\prod_{\lambda \in \Lambda} \mathscr{F}(U_\lambda) := \left\{ f : \Lambda \to \bigcup_{\lambda \in \Lambda} \mathscr{F}(U_\lambda);\ \forall \lambda \in \Lambda,\ f(\lambda) \in \mathscr{F}(U_\lambda) \right\}$$

を考え、通常の様に $f = (f_\lambda;\ \lambda \in \Lambda)$ と表す事にする。$\displaystyle\prod_{\lambda \in \Lambda} \mathscr{F}(U_\lambda)$ には

$$\begin{aligned} (f_\lambda;\ \lambda \in \Lambda) + (g_\lambda;\ \lambda \in \Lambda) &:= (f_\lambda + g_\lambda;\ \lambda \in \Lambda) \\ a(f_\lambda;\ \lambda \in \Lambda) &:= (af_\lambda;\ \lambda \in \Lambda) \end{aligned}$$

として加法及びスカラー倍が定義され、$\displaystyle\prod_{\lambda \in \Lambda} \mathscr{F}(U_\lambda)$ はベクトル空間を成す。次に $\Lambda_I^2 := \{(\lambda, \mu) \in \Lambda^2;\ U_\lambda \cap U_\mu \neq \emptyset\}$ として積空間

$$\prod_{(\lambda,\mu) \in \Lambda_I^2} \mathscr{F}(U_{\lambda\mu}) := \left\{ f : \Lambda_I^2 \to \bigcup_{(\lambda,\mu) \in \Lambda_I^2} \mathscr{F}(U_{\lambda\mu});\ \forall (\lambda, \mu) \in \Lambda_I^2,\ f(\lambda, \mu) \in \mathscr{F}(U_{\lambda\mu}) \right\}$$

を考え、通常の様に $f = (f_{\lambda\mu};\ (\lambda, \mu) \in \Lambda_I^2)$ と表す事にする。ここに $U_{\lambda\mu} := U_\lambda \cap U_\mu$ とする。$\displaystyle\prod_{(\lambda,\mu) \in \Lambda_I^2} \mathscr{F}(U_{\lambda\mu})$ には

$$\begin{aligned} \big(f_{\lambda\mu};\ (\lambda, \mu) \in \Lambda_I^2\big) + \big(g_{\lambda\mu};\ (\lambda, \mu) \in \Lambda_I^2\big) &:= \big(f_{\lambda\mu} + g_{\lambda\mu};\ (\lambda, \mu) \in \Lambda_I^2\big) \\ a\left(f_{\lambda\mu};\ (\lambda, \mu) \in \Lambda_I^2\right) &:= \big(af_{\lambda\mu};\ (\lambda, \mu) \in \Lambda_I^2\big) \end{aligned}$$

として加法及びスカラー倍が定義され、$\displaystyle\prod_{(\lambda,\mu) \in \Lambda_I^2} \mathscr{F}(U_{\lambda\mu})$ はベクトル空間を成す。

さて $f \in \mathscr{F}(\Omega)$ を一つ取ると任意の $\lambda \in \Lambda$ に対し $\iota_{U_\lambda}^\Omega(f) \in \mathscr{F}(U_\lambda)$ であるから $\varepsilon(f) := \big(\iota_{U_\lambda}^\Omega(f);\ \lambda \in \Lambda\big)$ と置くと $\varepsilon(f) \in \displaystyle\prod_{\lambda \in \Lambda} \mathscr{F}(U_\lambda)$ が定まる。更に $f, g \in \mathscr{F}(\Omega)$ に対し

$$\begin{aligned} \varepsilon(f + g) &= \big(\iota_{U_\lambda}^\Omega(f + g);\ \lambda \in \Lambda\big) = \big(\iota_{U_\lambda}^\Omega(f) + \iota_{U_\lambda}^\Omega(g);\ \lambda \in \Lambda\big) \\ &= \big(\iota_{U_\lambda}^\Omega(f);\ \lambda \in \Lambda\big) + \big(\iota_{U_\lambda}^\Omega(g);\ \lambda \in \Lambda\big) \\ &= \varepsilon(f) + \varepsilon(g), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varepsilon(af) &= \big(\iota_{U_\lambda}^\Omega(af);\ \lambda \in \Lambda\big) = \big(a\iota_{U_\lambda}^\Omega(f);\ \lambda \in \Lambda\big) = a\left(\iota_{U_\lambda}^\Omega(f);\ \lambda \in \Lambda\right) \\ &= a\varepsilon(f) \end{aligned}$$

が成立つので $\varepsilon : \mathscr{F}(\Omega) \ni f \mapsto \varepsilon(f) \in \prod_{\lambda\in\Lambda} \mathscr{F}(U_\lambda)$ は線型写像となる。

また $(f_\lambda;\ \lambda \in \Lambda) \in \prod_{\lambda\in\Lambda} \mathscr{F}(U_\lambda)$ を一つ取ると任意の $(\lambda,\mu) \in \Lambda_I^2$ に対し $\iota^{U_\mu}_{U_\lambda\cap U_\mu}(f_\mu) - \iota^{U_\lambda}_{U_\lambda\cap U_\mu}(f_\lambda) \in \mathscr{F}(U_\lambda\cap U_\mu)$ であるから $\delta\left((f_\lambda;\ \lambda\in\Lambda)\right) := \left(\iota^{U_\mu}_{U_\lambda\cap U_\mu}(f_\mu) - \iota^{U_\lambda}_{U_\lambda\cap U_\mu}(f_\lambda); (\lambda,\mu)\in\Lambda_I^2\right)$ と置くと $\delta\left((f_\lambda;\ \lambda\in\Lambda)\right) \in \prod_{(\lambda,\mu)\in\Lambda_I^2} \mathscr{F}(U_{\lambda\mu})$ が定まる。

更に $(f_\lambda;\ \lambda\in\Lambda), (g_\lambda;\ \lambda\in\Lambda) \in \prod_{\lambda\in\Lambda}\mathscr{F}(U_\lambda)$ に対し

$$
\begin{aligned}
&\delta\left((f_\lambda;\ \lambda\in\Lambda) + (g_\lambda;\ \lambda\in\Lambda)\right) \\
&= \delta\left((f_\lambda + g_\lambda;\ \lambda\in\Lambda)\right) \\
&= \left(\iota^{U_\mu}_{U_\lambda\cap U_\mu}(f_\mu + g_\mu) - \iota^{U_\lambda}_{U_\lambda\cap U_\mu}(f_\lambda + g_\lambda); (\lambda,\mu)\in\Lambda_I^2\right) \\
&= \left(\left(\iota^{U_\mu}_{U_\lambda\cap U_\mu}(f_\mu) - \iota^{U_\lambda}_{U_\lambda\cap U_\mu}(f_\lambda)\right) + \left(\iota^{U_\mu}_{U_\lambda\cap U_\mu}(g_\mu) - \iota^{U_\lambda}_{U_\lambda\cap U_\mu}(g_\lambda)\right); (\lambda,\mu)\in\Lambda_I^2\right) \\
&= \left(\iota^{U_\mu}_{U_\lambda\cap U_\mu}(f_\mu) - \iota^{U_\lambda}_{U_\lambda\cap U_\mu}(f_\lambda); (\lambda,\mu)\in\Lambda_I^2\right) + \left(\iota^{U_\mu}_{U_\lambda\cap U_\mu}(g_\mu) - \iota^{U_\lambda}_{U_\lambda\cap U_\mu}(g_\lambda); (\lambda,\mu)\in\Lambda_I^2\right) \\
&= \delta\left((f_\lambda;\ \lambda\in\Lambda)\right) + \delta\left((g_\lambda;\ \lambda\in\Lambda)\right),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\delta\left(a(f_\lambda;\ \lambda\in\Lambda)\right) \\
&= \delta\left((af_\lambda;\ \lambda\in\Lambda)\right) \\
&= \left(\iota^{U_\mu}_{U_\lambda\cap U_\mu}(af_\mu) - \iota^{U_\lambda}_{U_\lambda\cap U_\mu}(af_\lambda); (\lambda,\mu)\in\Lambda_I^2\right) \\
&= \left(a\left(\iota^{U_\mu}_{U_\lambda\cap U_\mu}(f_\mu) - \iota^{U_\lambda}_{U_\lambda\cap U_\mu}(f_\lambda)\right); (\lambda,\mu)\in\Lambda_I^2\right) \\
&= a\left(\iota^{U_\mu}_{U_\lambda\cap U_\mu}(f_\mu) - \iota^{U_\lambda}_{U_\lambda\cap U_\mu}(f_\lambda); (\lambda,\mu)\in\Lambda_I^2\right) \\
&= a\delta\left((f_\lambda;\ \lambda\in\Lambda)\right)
\end{aligned}
$$

が成立つので $\delta : \prod_{\lambda\in\Lambda}\mathscr{F}(U_\lambda) \ni (f_\lambda;\ \lambda\in\Lambda) \mapsto \delta\left((f_\lambda;\ \lambda\in\Lambda)\right) \in \prod_{(\lambda,\mu)\in\Lambda_I^2}\mathscr{F}(U_{\lambda\mu})$ は線型写像となる。以上により、ベクトル空間と線型写像の成す図式

$$
0 \to \mathscr{F}(\Omega) \xrightarrow{\varepsilon} \prod_{\lambda\in\Lambda}\mathscr{F}(U_\lambda) \xrightarrow{\delta} \prod_{(\lambda,\mu)\in\Lambda_I^2}\mathscr{F}(U_{\lambda\mu}) \tag{4.1}
$$

を設定する事が出来る。ここに左端の 0 はベクトル空間 $\{0\}$ を表し $0 \to \mathscr{F}(\Omega)$ は原点を原点に写す零（線型）写像を意味する。任意の $f \in \mathscr{F}(\Omega)$ に対し (S0) により

$$
\begin{aligned}
(\delta\circ\varepsilon)(f) &= \delta\left(\left(\iota^{\Omega}_{U_\lambda}(f);\ \lambda\in\Lambda\right)\right) \\
&= \left(\iota^{U_\mu}_{U_\lambda\cap U_\mu}\left(\iota^{\Omega}_{U_\mu}(f)\right) - \iota^{U_\lambda}_{U_\lambda\cap U_\mu}\left(\iota^{\Omega}_{U_\lambda}(f)\right);\ (\lambda,\mu)\in\Lambda_I^2\right) \\
&= \left(\iota^{\Omega}_{U_\lambda\cap U_\mu}(f) - \iota^{\Omega}_{U_\lambda\cap U_\mu}(f);\ (\lambda,\mu)\in\Lambda_I^2\right) \\
&= \left(0;\ (\lambda,\mu)\in\Lambda_I^2\right) \\
&= 0
\end{aligned}
$$

となるので $\delta\circ\varepsilon=0$ が従う。これより $\mathrm{Im}\ \varepsilon\subset\mathrm{Ker}\ \delta$ を得る。$\varepsilon:\mathscr{F}(\Omega)\to\displaystyle\prod_{\lambda\in\Lambda}\mathscr{F}(U_\lambda)$ が単射即ち $\mathrm{Ker}\ \varepsilon=0$ である事は、次の条件 (S1)

(S1) $f\in\mathscr{F}(\Omega)$ は任意の $\lambda\in\Lambda$ に対し $\iota^{\Omega}_{U_\lambda}(f)=0$ を満たすならば $f=0$

と同値である。また（$\mathrm{Im}\ \varepsilon\subset\mathrm{Ker}\ \delta$ の下で）$\mathrm{Im}\ \varepsilon=\mathrm{Ker}\ \delta$ である事は、次の条件 (S2)

(S2) $(f_\lambda;\ \lambda\in\Lambda)\in\displaystyle\prod_{\lambda\in\Lambda}\mathscr{F}(U_\lambda)$ は任意の $(\lambda,\mu)\in\Lambda_I^2$ に対し

$$\iota^{U_\lambda}_{U_\lambda\cap U_\mu}(f_\lambda)=\iota^{U_\mu}_{U_\lambda\cap U_\mu}(f_\mu)$$

を満たすならば $f\in\mathscr{F}(\Omega)$ が存在して任意の $\lambda\in\lambda$ に対し $\iota^{\Omega}_{U_\lambda}(f)=f_\lambda$ を満たす

と同値である。

X 上の前層 $\mathscr{F}$ は Ω の任意の開被覆 $\mathscr{U}$ に対し (S1)(S2) を満たすとき、即ち Ω の任意の開被覆 $\mathscr{U}$ に対し図式 (4.1) が**完全列** (exact sequence) であるとき X 上の**層** (sheaf on X) であると謂う。

以下 $\mathscr{F}$ は X 上の層であるとする。$p\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対して開被覆 $\mathscr{U}$ に関する $\mathscr{F}$ 係数の**交代的 $\boldsymbol{p}$ 余鎖体加群** (alternating p-cochain module) を

$$C^p(\mathscr{U},\mathscr{F}):=\Big\{f=\big(f_{\lambda_0\cdots\lambda_p};(\lambda_0,\cdots,\lambda_p)\in\Lambda_I^{p+1}\big)\in\prod_{(\lambda_0,\cdots,\lambda_p)\in\Lambda_I^{p+1}}\mathscr{F}(U_{\lambda_0\cdots\lambda_p});$$
$$f_{\lambda_{\sigma(0)}\cdots\lambda_{\sigma(p)}}=\mathrm{sgn}(\sigma)f_{\lambda_0\cdots\lambda_p}\ \forall\sigma\in\mathfrak{S}_{p+1}\Big\}$$

で定義する。ここに

$$U_{\lambda_0\cdots\lambda_p}:=\bigcap_{j=0}^{p}U_{\lambda_j}$$
$$\Lambda_I^{p+1}:=\big\{(\lambda_0,\cdots,\lambda_p)\in\Lambda^{p+1};U_{\lambda_0\cdots\lambda_p}\neq\emptyset\big\}$$

とし $\mathfrak{S}_{p+1}$ は $\{0,\cdots,p\}$ に対する $(p+1)$ 次対称群、$\mathrm{sgn}(\sigma)$ は置換 σ の符号とする。

特に $p=0$ の場合

$$C^0(\mathscr{U},\mathscr{F})=\prod_{\lambda\in\Lambda}\mathscr{F}(U_\lambda)$$

である。$f\in C^p(\mathscr{U},\mathscr{F})$ 及び $(\lambda_0,\cdots,\lambda_p)\in\Lambda_I^{p+1}$ に対し

$$(\delta f)_{\lambda_0\cdots\lambda_{p+1}}:=\sum_{k=0}^{p+1}(-1)^k\iota^{U_{\lambda_0\cdots\widehat{\lambda}_k\cdots\lambda_{p+1}}}_{U_{\lambda_0\cdots\lambda_{p+1}}}\left(f_{\lambda_0\cdots\widehat{\lambda}_k\cdots\lambda_{p+1}}\right)$$

と定義する。ここに $\widehat{\lambda}_k$ は λ_k を除く記号を意味するものとする。このとき定義より

$(\delta f)_{\lambda_0\cdots\lambda_{p+1}} \in \mathscr{F}(U_{\lambda_0\cdots\lambda_{p+1}})$ であり任意の $\sigma \in \mathfrak{S}_{p+2}$ に対し

$$
\begin{aligned}
(\delta f)_{\lambda_{\sigma(0)}\cdots\lambda_{\sigma(p+1)}} &= \sum_{k=0}^{p+1}(-1)^k \iota^{U_{\lambda_{\sigma(0)}\cdots\widehat{\lambda}_k\cdots\lambda_{\sigma(p+1)}}}_{U_{\lambda_{\sigma(0)}\cdots\lambda_{\sigma(p+1)}}}\left(f_{\lambda_{\sigma(0)}\cdots\widehat{\lambda}_k\cdots\lambda_{\sigma(p+1)}}\right) \\
&= \sum_{k=0}^{p+1}(-1)^k \iota^{U_{\lambda_{\sigma(0)}\cdots\widehat{\lambda}_k\cdots\lambda_{\sigma(p+1)}}}_{U_{\lambda_{\sigma(0)}\cdots\lambda_{\sigma(p+1)}}}\left(\operatorname{sgn}(\sigma) f_{\lambda_0\cdots\widehat{\lambda}_k\cdots\lambda_p+1}\right) \\
&= \sum_{k=0}^{p+1}(-1)^k \operatorname{sgn}(\sigma)\iota^{U_{\lambda_{\sigma(0)}\cdots\widehat{\lambda}_k\cdots\lambda_{\sigma(p+1)}}}_{U_{\lambda_{\sigma(0)}\cdots\lambda_{\sigma(p+1)}}}\left(f_{\lambda_0\cdots\widehat{\lambda}_k\cdots\lambda_p+1}\right) \\
&= \operatorname{sgn}(\sigma)\sum_{k=0}^{p+1}(-1)^k \iota^{U_{\lambda_{\sigma(0)}\cdots\widehat{\lambda}_k\cdots\lambda_{\sigma(p+1)}}}_{U_{\lambda_{\sigma(0)}\cdots\lambda_{\sigma(p+1)}}}\left(f_{\lambda_0\cdots\widehat{\lambda}_k\cdots\lambda_p+1}\right) \\
&= \operatorname{sgn}(\sigma)(\delta f)_{\lambda_0\cdots\lambda_{\sigma(p+1)}}
\end{aligned}
$$

となるから $\delta f \in C^{p+1}(\mathscr{U}, \mathscr{F})$ が定まる事になる。また $U \subset V$ なる開集合の組に対して定まる ι_U^V の線型性に因り、写像 $\delta : C^p(\mathscr{U}, \mathscr{F}) \ni f \mapsto \delta f \in C^{p+1}(\mathscr{U}, \mathscr{F})$ の線型性が導かれる。この線型写像を δ_p と表す事も有る。$f \in C^p(\mathscr{U}, \mathscr{F})$ に対し

$$
\begin{aligned}
&(\delta_{p+1} \circ \delta_p)(f) = \delta_{p+1}(\delta_p f) \\
&= \sum_{k=0}^{p+2}(-1)^k \iota^{U_{\lambda_0\cdots\widehat{\lambda}_k\cdots\lambda_{p+2}}}_{U_{\lambda_0\cdots\lambda_{p+2}}}\left((\delta_p f)_{\lambda_0\cdots\widehat{\lambda}_k\cdots\lambda_{p+2}}\right) \\
&= \sum_{k=0}^{p+2}(-1)^k \iota^{U_{\lambda_0\cdots\widehat{\lambda}_k\cdots\lambda_{p+2}}}_{U_{\lambda_0\cdots\lambda_{p+2}}}\left(\sum_{j<k}(-1)^j \iota^{U_{\lambda_0\cdots\widehat{\lambda}_j\cdots\widehat{\lambda}_k\cdots\lambda_{p+2}}}_{U_{\lambda_0\cdots\widehat{\lambda}_k\cdots\lambda_{p+2}}}\left(f_{\lambda_0\cdots\widehat{\lambda}_j\cdots\widehat{\lambda}_k\cdots\lambda_{p+2}}\right)\right. \\
&\qquad\qquad\left. + \sum_{j>k}(-1)^{j-1} \iota^{U_{\lambda_0\cdots\widehat{\lambda}_k\cdots\widehat{\lambda}_j\cdots\lambda_{p+2}}}_{U_{\lambda_0\cdots\widehat{\lambda}_k\cdots\lambda_{p+2}}}\left(f_{\lambda_0\cdots\widehat{\lambda}_k\cdots\widehat{\lambda}_j\cdots\lambda_{p+2}}\right)\right) \\
&= \sum_{k=0}^{p+2}(-1)^k \sum_{j<k}(-1)^j \iota^{U_{\lambda_0\cdots\widehat{\lambda}_j\cdots\widehat{\lambda}_k\cdots\lambda_{p+2}}}_{U_{\lambda_0\cdots\lambda_{p+2}}}\left(f_{\lambda_0\cdots\widehat{\lambda}_j\cdots\widehat{\lambda}_k\cdots\lambda_{p+2}}\right) \\
&\quad - \sum_{k=0}^{p+2}(-1)^k \sum_{j>k}(-1)^j \iota^{U_{\lambda_0\cdots\widehat{\lambda}_k\cdots\widehat{\lambda}_j\cdots\lambda_{p+2}}}_{U_{\lambda_0\cdots\lambda_{p+2}}}\left(f_{\lambda_0\cdots\widehat{\lambda}_k\cdots\widehat{\lambda}_j\cdots\lambda_{p+2}}\right) \\
&= \sum_{k=0}^{p+2}\sum_{j<k}(-1)^{j+k} \iota^{U_{\lambda_0\cdots\widehat{\lambda}_j\cdots\widehat{\lambda}_k\cdots\lambda_{p+2}}}_{U_{\lambda_0\cdots\lambda_{p+2}}}\left(f_{\lambda_0\cdots\widehat{\lambda}_j\cdots\widehat{\lambda}_k\cdots\lambda_{p+2}}\right) \\
&\quad - \sum_{j=0}^{p+2}\sum_{k<j}(-1)^{j+k} \iota^{U_{\lambda_0\cdots\widehat{\lambda}_k\cdots\widehat{\lambda}_j\cdots\lambda_{p+2}}}_{U_{\lambda_0\cdots\lambda_{p+2}}}\left(f_{\lambda_0\cdots\widehat{\lambda}_k\cdots\widehat{\lambda}_j\cdots\lambda_{p+2}}\right) \\
&= \sum_{k=0}^{p+2}\sum_{j<k}(-1)^{j+k} \iota^{U_{\lambda_0\cdots\widehat{\lambda}_j\cdots\widehat{\lambda}_k\cdots\lambda_{p+2}}}_{U_{\lambda_0\cdots\lambda_{p+2}}}\left(f_{\lambda_0\cdots\widehat{\lambda}_j\cdots\widehat{\lambda}_k\cdots\lambda_{p+2}}\right) \\
&\quad - \sum_{k=0}^{p+2}\sum_{j<k}(-1)^{k+j} \iota^{U_{\lambda_0\cdots\widehat{\lambda}_j\cdots\widehat{\lambda}_k\cdots\lambda_{p+2}}}_{U_{\lambda_0\cdots\lambda_{p+2}}}\left(f_{\lambda_0\cdots\widehat{\lambda}_j\cdots\widehat{\lambda}_k\cdots\lambda_{p+2}}\right) \\
&= 0
\end{aligned}
$$

となるから $\delta_{p+1}\circ\delta_p=0$ が従う。$C^p(\mathscr{U},\mathscr{F})$ に於ける δ_p の核

$$Z^p(\mathscr{U},\mathscr{F}) := \mathrm{Ker}\ \delta_p$$

及び δ_{p-1} の像

$$B^p(\mathscr{U},\mathscr{F}) := \mathrm{Im}\ \delta_{p-1}$$

を夫々 ***p* 余輪体加群** (p-cocycle module) 及び ***p* 余境界加群** (p-coboundary module) と謂う。但し $B^0(\mathscr{U},\mathscr{F})=0$ と考える。上で示された等式 $\delta_{p+1}\circ\delta_p=0$ に拠り $B^p(\mathscr{U},\mathscr{F})$ は $Z^p(\mathscr{U},\mathscr{F})$ の部分空間と見做す事が出来、商空間

$$H^p(\mathscr{U},\mathscr{F}) := Z^p(\mathscr{U},\mathscr{F})/B^p(\mathscr{U},\mathscr{F})$$

が定まる。この空間 $H^p(\mathscr{U},\mathscr{F})$ を開被覆 $\mathscr{U}$ に関する層 $\mathscr{F}$ 係数の p 次**コホモロジー加群** (cohomology module of order k) と謂う。特に $p=0$ の場合 $H^0(\mathscr{U},\mathscr{F})=\mathscr{F}(\Omega)$ を自然な同型と見做す事が出来る。

定理 4 の仮定 (i)(ii) は、開集合 Ω の開被覆 $\mathscr{U}=(U_\lambda;\ \lambda\in\Lambda)$ に関する $\mathscr{O}(\Omega)$ 係数の交代的 1 余鎖体 $(f_{\lambda\mu};\ (\lambda,\mu)\in\Lambda_I^2)$ が余輪体である事を意味する。ここに $\mathscr{O}(\Omega)$ は各開集合 U に対する U 上の正則函数の成すベクトル空間 $\mathscr{O}(\Omega)$ と $U\subset V$ なる開集合の対に対する線型写像としての制限写像 $\iota_U^V : \mathscr{F}(V)\ni f\mapsto f|U\in\mathscr{O}(U)$ から成る層と見成したものである。定理 4 の結論は、その $(f_{\lambda\mu})\in Z^1(\mathscr{U},\mathscr{O}(\Omega))$ が $(f_{\lambda\mu})\in B^1(\mathscr{U},\mathscr{O}(\Omega))$ である事を意味する。従って定理 4 は次の形に捉え直すことが出来る。

定理６（ミッタク・レフラーのコホモロジー消滅定理 その２）

開集合 $\Omega\subset\mathbb{C}$ の任意の開被覆 $\mathscr{U}$ に関する層 $\mathscr{O}(\Omega)$ 係数の 1 次以上のコホモロジー加群は消滅する。即ち $p\geq 1$ に対し次が成立つ。

$$H^p(\mathscr{U},\mathscr{O}(\Omega))=0$$

参考文献：

笠原 乾吉, 『複素解析』, 実教出版
小松 彦三郎, 『超関数論入門』, 岩波講座 基礎数学
野口 潤次郎, 『複素解析概論』, 裳華房
F. Haslinger, “Complex Analysis,” De Gruyter